SZTOCHASZTIKUS RENDSZEREK ÉS PÉNZÜGYI PIACOK MODELLEZÉSE

OTKA 047193

2004-2006

Zárójelentés

Gerencsér László

MTA SZTAKI

2007

Bevezető. A kutatások célja a sztochasztikus rendszerek legkorszerűbb módszereinek az alkalmazása a pénzügyi piacok modellezésében és maguknak a módszereknek a továbbfejlesztése. A pénzügyi matematika ma egyik legnagyobb kihívása jó fedezeti stratégiák kialakítása nem-teljes piacokon. Ez matematikailag egy sajátos sztochasztikus adaptív kontrol problémát jelent, ahol a dinamikát egy olyan sokdimenziós diffóziós folyamat írja le, amely maga is függ egy Markov-folyamattól. Kutatásaink javarészt PhD hallgatók által is megoldható módszertani problémákhoz kötődnek. A fő területek: rejtett Markov-folyamatok, tőzsdemodellek, sztochasztikus volatilitás, valamint a kontroll elmélet és az opcióárazás kapcsolata. Ezen tól munkáinkban a sztochasztikus adaptív kontrol néhány alapvető kérdését is vizsgáltuk. A beszámoló lényegében a PhD programok szerinti bontást követi, a kisebb témákat a végén ismertetjük.

Rejtett Markov folyamatok. Ezt a kutatást elsősorban Molnár Sáska Gábor PhD hallgatóval (BME Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola, 1999-2006) végeztük, az MTA SZTAKI Sztochasztikus Rendszerek Kutatócsoport tagjainak a részvételével, valamint Michaletzky György (ELTE TTK) és Tusnády Gábor (MTA Rényi Inézet) részvételével. A munka eredménye többek között a 2006-ban megvédett PhD disszertáció.

A sztochasztikus rendszerek elméletének egy alapvető jelentőségű modern eszköze a rejtett Markov modellek. Sikerének titka, hogy ez egy elég általános, de még matematikailag kezelhető, és valódi kihívást jelentő modellosztály, amely számos területen nyert alkalmazást. Rejtett Markov folyamatok elméletének egy alapproblémája a dinamika (állapot-valószínűségátmenetek ill. kiolvasási valószínűségek) identifikációja. Rejtett Markov modellre egy klasszikus példa az

$$Y_n = h(X_n) + \sigma(X_n)\,\epsilon_n,$$

modell, ahol (X_n), egy véges állapotú Markov-folyamat, (ϵ_n) egy Gauss fehr zaj, $h, \sigma : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ pedig tetszőleges leképezések. Kutatómunkánk egy alapvető eszköze a Markov-folyamatok egy kevéssé ismert realizációja, amely először V. Borkar 1993-as dolgozatában szerepel, [3]. Ennek segítségével kapcsolat teremthető a lineáris sztochasztikus rendszerek és a rejtett Markov-folyamatok között, ld. [17], továbbá [26]. Egy idetartozó eszköz az ún. prediktív szűrő stabilitásának a vizsgálata is, ld. [27] ill. [16].

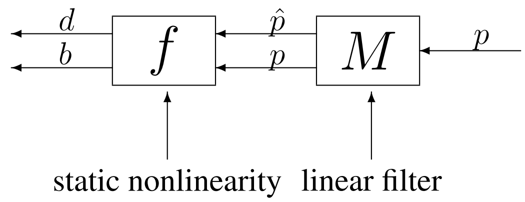
Egy másik fontos kutatási irány a rekurzív becslések Benveniste, Metivier és Priuroet, [1] által kifejlesztett, (röviden BMP) elméletének adaptálása rejtett Markov folyamatokra, ez a kutatás közel van a befejezéshez. Végül a fenti dolgozatokra is támaszkodva kidolgoztunk egy módszert rejtett Markov folyamatok változásdetektálására, a matematikai statisztikából jól ismert Hinkley detektor adaptálásával, ld. [21],[20].

Kvantált Gauss modellek. Ez a téma szellemében a rejtett Markov-folyamatok témához kapcsolódik. Ezt a kutatást még a pályázati ciklus előtt döntően Kmecs Ildikó PhD hallgatóval (ELTE TTK, Matematika Doktori Iskola, 1996-2003) végeztük. A disszertáció 2003 szeptemberében került benyújtásra, azóta utómunkálatok folytak, elsősorban L. Finesso (CNR ISIB, Padova), továbbá Szilágyi Tünde egyetemi hallgató (PPKE ITK) közreműködésével. Célunk a kvantált lineáris sztochasztikus Gauss-modellek, ezen belül kvantált Gauss ARMA-folyamatok vizsgálata. Egy természetes eszköz a statisztikában jól ismert ún. EM (Expectation Maximization) módszer, A fellépő feltételes várható érték kiszámításához egy Markov Chain Monte Carlo (MCMC) módszert alkalmazunk, így az ún. M-lépést egy sztochasztikus approximációs eljárással realizáljuk, ld. [6].

Pénzügyi piacok viselkedési modelljei. Mátyás Zalán PhD hallgatóval (ELTE TTK, Matematika Doktori Iskola, 2002-2005), és Száz János (Corvinus Egyetem) közreműködésével kidolgoztuk pénzügyi piacok egy sztochasztikus feedback modelljét. Ebben - a tipikus mérnöki problémákkal szemben - a rendszer dinamikája ismert, ezt a tőzsdeszabályok pontosan meghatározzák. Ezzel szemben a piaci szereplők egymás kereskedési stratégiáit nem ismerik, ebből adódik a rendszer bizonytalansága. Az egyes ágensek döntéseit egyrészt az ő beállítottságuk, kereskedési stratégiájuk, másrészt az árfolyammozgásokkal kapcsolatos várako-
zásaik határozzák meg. Vannak kockázatkedvelő és kockázatkerülő ágensek, és ezen belül a viselkedéseknek egy széles skáláját tárta fel a kísérleti pszichológia.

Az általunk kialakított modellt, ld. [13], [15], legegyszerűbben egy új, jelentős súllyal rendelkező piaci szereplő szemszögéből lehet értelmezni. Az új szereplő előzetes piaci elemzései alapján alakítja ki döntéseit, amelyek ugyanakkor a teljes piac dinamikáját eltolják valamilyen irányban. A megváltozott árfolyamdinamikára a piaci szereplők, ezen belül a belépő piaci szereplő is reagál.

Az adaptációs mechanizmus formálisabban így írható le: a p árfolyam előzetes vizsgálata alapján az új szereplő kialakít egy M prediktort, amely a modelljeinkben egy FIR szűrő, ez létrehoz egy $\hat{p}$ előrejelzést. Az előrejelzés és a saját beállítottsága -f - alapján, amelyet egy statikus nemlinearitás ad meg, kialakul egy vételi ill. eladási ajánlat: egy b ár ill. egy d mennyiség. Ezt az egész leképezést $C(M)$-mel jelöljük:



Az új árfolyamdinamikához egy új prediktor tartozik, mondjuk M^+. Az adaptáció egy lépése tehát:

$$M \to C(M) \to M^+.$$

A kérdés, hogy milyen feltételek mellettt létezik piaci egyensúly, és hogy ezt a piaci szereplők egymástól független tevékenysége milyen mechanizmusokon át valósítja meg. Piaci egyensúly akkor jön létre, amikor a feltételezett árfolyam dinamika alapján született beavatkozások nem változtatják meg az árfolyamdinamikát. Ez egy nem-szokványos sztochasztikus adaptív kontrol feladatra vezet, amelyben a cél egy M^* *fixpont* meghatározása.

Az adaptációs mechanizmus egy on-line, valós időben implementálható változatának a vizsgálatát a BMP elmélet alapján végeztük el. A BMP elméletet magát is továbbfejlesztettük: az eredeti $1-\delta$ valószínűségű konvergenciát 1valószínűségű konvergenciává javítottuk egy alkalmas újraindítási mechanizmussal, [14]. A szimulációs vizsgálatokben döntően egyetlen szereplő adaptációját vizsgáltuk, egy azóta megkezdett újabb PhD projekt (Torma Balázs, ELTE IK, Informatika Doktori Iskola, 2006-) keretében vizsgáljuk több szereplő egyiedejű adaptációját és kölcsönhatását reális korlátozó feltételek mellett, ezen belül a bennfentes kereskedés detektálására keresünk algoritmusokat.

Sztochasztikus volatilitás modellek. A témán Orlovits Zsanett PhD hallgatóval (ELTE TTK, Matematika Doktori Iskola, 2003-2006) dolgoztunk, Michaletzky György (ELTE TTK) és Vágó Zsuzsa részvételével. Egy részvény vagy index napi záróárát P_n-nel jelölve, a szóbanforgó termék log-hozamát az

$$y_n = \log \frac{P_n}{P_{n-1}}$$

képlet definiálja. A log-hozam idősorok egy jellemző tulajdonsága az ún. ”volatility clustering”, ami azt jelenti, hogy hosszú alacsony volatilitású, nyugodt időszakokat rövid, magas volatilitású időszakok követnek. A fenti idősorok egy egyszerű, matematikailag is formalizálható tulajdonsága, hogy a feltételes szórás időben változó, szemben a lineársi modellekkel. Az első nemlineáris modell, amelyet a log-hozam folyamatok modellezésére hoztak létre R. Engle, 1982, [5] nevéhez fűződik, aki ezért a munkájáért 2002-ben megosztott közgadasági Nobel-díjat kapott.

Ez az ún. ARCH model (autoregressive conditionally heteroscedasticity) model, amelyben a log-hozamot az

$$y_n = \sigma_n \varepsilon_n \tag{1}$$

egyenlet definiálja, ahol ε_n egy független azonos eloszlású zajforrás, σ_n pedig a feltételes szórás, amelyet egy AR szűrőt és statikus nem-linearitásokat tartalmazó visszacsatolással, korábbi log-hozam értékekből számítunk ki. Ennek a modellnek egy kiterjesztése a GARCH modell, [2], amelyben a visszacsatolásban egy ARMA szűrő jelenik meg. A feladat a visszacsatolásban szereplő ismeretlen paraméterek meghatározása a regisztrált adatokból.

GARCH folyamatok identifikációjára a szokásos út egy kvázi-likelihood módszer alkalmazása. A kérdés az, hogy ez milyen feltételek mellett lesz konzisztens statisztikai értelemben. A szakirodalomban fellelhető, nem túl nagy számú dolgozat az off-line identifikáció problémáját tárgyalja. Ugyanakkor a pénzügyi idősorok elemzésére természetesebb valós időben is alkalmazható rekurzív vagy on-line módszereket kifejleszteni. Ennek természetes eszköztára a BMP elmélet, amelynek alkalmazhatóságát a [22] dolgozatban vázoltuk. Az elmélet alkalmazása során tisztáztunk egy érdekes, triviálisnak tünő technikai kérdést is: megmutattuk, hogy négyzetes véletlen mátrixok egy stacionárius

$$P_n = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ B_n & C_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

sorozatára, minimális technikai feltételek mellett, a top-Ljapunov exponensekre a

$$\lambda(P) = \max(\lambda(A), \lambda(C))$$

egyenlőség teljesül, ld. [18], [28]. A BMP elmélettel való kapcsolat kidolgozása számos más, lineáris sztochasztikus rendszerekben elért eredmény adaptálását is lehetővé teszi. Példaképpen említünk egy GARCH folyamatok valós idejű változás-detektálására kidolgozott módszert, [21].

Kontrol-elmélet a pénzügyi matematikában. Ezek a munkák elsősorban Rásonyi Miklós kutatásaihoz kapcsolódnak. A [34] és [32] dolgozatokban optimális portfoliók létezését bizonyítottuk egy U konkáv monoton növő függvény hasznossági függvény mellett. Minden eddiginél gyengébb feltételek esetén bizonyítottuk optimális portfolió létezésé diszkrét időben nem feltétlenül differenciálható U mellett. Olyan opcióárazási módszereket dolgoztunk ki, amelyek a befektető preferenciáit is figyelembe veszik. A [31] dolgozatban megmutattuk, hogy erős kockázatkerülés esetén az opciók ára az ún. szintetizálási költséghez közeli értekre állnak be.

Pénzügyi piacok elméletében fontos kérdés az ún. nevezett *nagy piacok* vizsgálata, pontosabban az a kérdés, hogy milyen módszerekkel lehet az arbitrázsmentességet definiálni ill. verifikálni. Ehhez a témakörhöz kapcsolódik a [29] dolgozat. A [30] cikk a nagy pénzügyi piacok arbitrázselméletébe nyújt bevezetést.

A magyar diákhitel rendszer vizsgálata. Ezt a munkát döntően Berlinger Edina (Corvinus Egyetem) inspirációjára végeztük. A magyar diákhitelrendszer modellezésére kifejlesztettünk egy sztochasztikus modellt, [4], amelyben két alapvető kontrol paraméter, a kockázati prémium ill. a törlesztési hányad hatását vizsgáltuk a fenntarthatóság szempontjából. A vizsgálatok egy fontos, de kontrol elméleti szempontból nem meglepő konklúziója, hogy a rendszert egy szuboptimális munkapont körül kell tartani ahhoz, hogy a működése robusztus legyen modellezési hibákkal szemben.

Log-optimális portfóliók. Ezeket a munkákat részben Györfi László (BME) kezdeményezésére végeztük. A befektetéselmélet egyik alapfeladata a maximális növekedési rátát biztosító ún. log-optimális portfólió meghatározása. A legegyszerűbb matematikai modell T. Cover nevéhez köthető, amelyben nincsenek tranzakciós költségek. A feladat lényegesen nehezebb az ún. surlódásos piacokon. Egy lehetséges megközelítés a stratégiák parametrizálása, és ezen belül az optimális paraméter meghatározása. Ez egy paraméterfüggő véletlen mátrix-folyamat top-Lyapunov-exponensének a maximalizálására vezet, amelyet a [24], [23] dolgozatokban vizsgáltunk.

Sztochasztikus adaptív kontrol és optimalizálás. Rekurzív becslések elméletének egy alapvető eredményét dolgoztuk ki a [7]

Gerencsér, L.: A representation theorem for recursive estimators. SIAM Journal on Control and Optimization, 44 (2005), pp. 2123-2188, dolgozatban, amelyben a becslési hibának egy ”zárt formulával” történő nagyon pontos közelítését adtuk meg, ld. még [8]. A hangsúly nem a zárt formulán, hanem a közelítés pontosságán van, amely lehetővé teszi számos korábban csak nagyon speciális esetben ismert eredmény kiterjesztését. Többek között lehetővé teszi adaptív kontrollerek alkalmazása során fellépő veszteségek (performance degradation) pontos meghatározását. Az elmélet egy szép alkalmazása az *adaptív input tervezés*, [11], [12], amely H. Hjalmarssonnal (KTH, Stockholm) közös munka.

Michaletzky György és Vágó Zsuzsa közreműköködésével a Van Schuppen és Stoorvogel által vázlatosan kidolgozott kockázatérzékeny identifikáció általánosabb és precizíz megalapozását adtuk a [19] dolgozatban. A megoldás a sztochasztikus realizációelmélet eszköztárát használja.

SPSA. A rekurzív becslések elméletének egy sepciális és viszonylag új fejezete az ún. SPSA (simultaneous perturbation stochastic approximation), amelyet elsősorban olyan optimalizási feladatok megoldására alkalmazunk, ahol a költségfüggvény csak szimulációval számolható, és a gradiensre még ez a lehetőség sem adott, ld. [33]. Egy potenciális, de még csak kevéssé kiaknázott alkalmazási területe az adaptív kontrol. A H. Hjalmarsson-tól származó ún. IFT módszer többdimenziós változatának a megalapozását adja a [25] dolgozat.

Az SPSA módszer egyrészt értelmezhető úgy, mint egy sztochasztikus gradiens módszer, másrészt úgy is, mint egy Markov-lánc, amely egy MCMC módszernek lehet a kezdőlánca. Ezt a duális szemléletet aknázzák ki a [10],[9] dolgozatok.

References

[1] A. Benveniste, M. Métivier, and P. Priouret. *Adaptive algorithms and stochastic approximations*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[2] T. Bollerslev. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31:307–327, 1986.

[3] V. S. Borkar. On white noise representations in stochastic realization theory. *SIAM J. Control Optim.*, 31:1093–1102, 1993.

[4] Berlinger E., Gerencsér L., Mátyás, and Rásonyi M. Analysis of an income contingent student loan system. *Journal of Economies in Transition*. To be submitted.

[5] R.F. Engle. Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of the UK Inflation. *Econometrica*, 50:987–1008, 1982.

[6] L. Finesso, L. Gerencsér, I. Kmecs, and T. Szilágyi. Estimation of quantized Gaussian linear models - a randomized EM method. *Int. Journal of Adaptive Control and Signal Processing Control*, 2007.

[7] L. Gerencsér. A representation theorem for recursive estimators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 44:2123–2188, 2005.

[8] L. Gerencsér. A representation theorem for recursive estimators. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control CDC'06, San Diego, California, USA, December 13-15*, pages 320–325, 2006.

[9] L. Gerencsér, S.D. Hill, and Zs. Vágó. Discrete stochastic approximation via simultaneous difference approximations. In *Proc. of the American Control Conference 2005, June 8 - 10*, pages 307–308, 2005.

[10] L. Gerencsér, S.D. Hill, Zs. Vágó, and Z. Vincze. Discrete optimization, SPSA and Markov Chain Monte Carlo methods. In *Proceedings of the American Control Conference 2004, June 30 - July 2*, pages 3814–3819, 2004.

[11] L. Gerencsér and H. Hjalmarsson. Adaptive input design in system identification. In *Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, CDC-ECC'05, Seville, Spain, December 12-15*, pages 4988–4993, 2005.

[12] L. Gerencsér and H. Hjalmarsson. Adaptive input design for ARX systems. In *Proc. of the European Control Conference, ECC'06, Kos, Greece, July 2-5*, 2007. Accepted for publication.

[13] L. Gerencsér and Z. Mátyás. A system theoretic approach to behavioral finance. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, The Bahamas, December 14-17*, 2004.

[14] L. Gerencsér and Z. Mátyás. Almost sure convergence of the bmp scheme with resetting. In *Proc. of the European Control Conference, ECC'06, Kos, Greece, July 2-5*, 2007. Accepted for publication.

[15] L. Gerencsér, Z. Mátyás, and J. Száz. A stochastic feedback system model of a stock exchange. In *Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, CDC-ECC'05, Seville, Spain, December 12-15*, pages 5215–5220, 2005.

[16] L. Gerencsér, Gy. Michaletzky, and G. Molnár-Sáska. An improved bound for the exponential stability of predictive filters of hidden Markov models. In *Communications in Information and Systems. Special Volume Dedicated to the 65th Birthday of Tyrone Duncan*, volume 7.1. 2007.

[17] L. Gerencsér, Gy. Michaletzky, G. Molnár-Sáska, and G. Tusnády. A new approach for the statistical analysis of Hidden Markov Models. *IEEE Trans. Automatic Control*. Under revision.

[18] L. Gerencsér, Gy. Michaletzky, and Zs. Orlovits. On the top-lyapunov exponent of block-triangular stationary random matrices. In *Proc. of the European Control Conference, ECC'06, Kos, Greece, July 2-5*, 2007. Accepted for publication.

[19] L. Gerencsér, Gy. Michaletzky, and Zs. Vágó. Risk-sensitive identification of linear stochastic systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 27, no 2:77–100, 2005.

[20] L. Gerencsér, G. Molnár-Sáska, and Zs. Orlovits. Change detection of Hidden Markov Models. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, The Bahamas, December 14-17*, 2004.

[21] L. Gerencsér, G. Molnár-Sáska, and Zs. Orlovits. Change Detection of Hidden Markov Models and GARCH processes. . In *Proceedings of the International Conference on Stochastic Finance, Lisbon, Portugal, September 26-30*, 2004. Electronic.

[22] L. Gerencsér, G. Molnár-Sáska, and Zs Orlovits. Recursive estimation of Hidden Markov Models . In *Proc. of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference CDC-ECC'05, Seville, Spain, December 12-15*, pages 1209–1214, 2005.

[23] L. Gerencsér, M. Rásonyi, Cs. Szepesvári, and Zs Vágó. Log-optimal portfolios and control Lyapunov-exponents . In *Proc. of the 44th Conference on Decision and Control and European Control Conference, CDC-ECC'05, Seville, Spain, December 12-15*, pages 1764–1769, 2005.

[24] L. Gerencsér, M. Rásonyi, and Zs. Vágó. Controlled Lyapunov-Exponents with Applications. In *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Nassau, The Bahamas, December 14-17*, 2004.

[25] L. Gerencsér and Zs. Vágó. The Mathematics of Noise-Free SPSA Stochastic Approximation with Vanishing Random Fields. *IEEE Trans. Automatic Control*.

[26] Gerencsér L. and Molnár-Sáska G. *Identification of hidden Markov models - uniform LLN-s.* Springer Verlag.

[27] Gerencsér L., Michaletzky Gy., and Molnár-Sáska G. Improved estimation of the exponential stability of the predictive filter in hidden Markov models . In *Proc. of the American Control Conference, ACC2006, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16*, pages 5177– 5182, 2006.

[28] Gerencsér L., Michaletzky Gy., and Orlovits Zs. On the top-lyapunov exponent of block-triangular stationary random matrices. *Systems and Control Letters*, 2006. Submitted.

[29] M. Rásonyi. Arbitrage theory and risk-neutral measures. *Decisions in Economics and Finance*, 27, no. 2:109–123, 2004.

[30] M Rásonyi. Arbitrázs nagy pénzügyi piacokon. *Szigma*, 35, no. 3-4:123–130, 2004.

[31] M. Rásonyi and L. Carassus. Convergence of utility indifference prices to the superreplication price. *Mathematical Methods Of Operations Research*, 64:145–154, 2006.

[32] M. Rásonyi and L. Stettner. On the existence of optimal portfolios for the utility maximization problem in discrete time financial market models. In *From Stochastic Calculus to Mathematical Finance - The Shiryaev Festschrift*, pages 589–608. Berlin, Springer, 2006.

[33] J.C. Spall. Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 37:332–341, 1992.

[34] L. Stettner and M. Rásonyi. On utility maximization in discrete-time financial market models. *Annals of Applied Probability*, 15(2):1367–1395, 2005.